

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig

Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 99

Eerste rapport over wachttijden van
vliegtuigen bij landing

door

Prof. Dr D. van Dantzig

en

J. Th. Runnenburg

1952

1. Inleiding.

In dit rapport wordt het probleem van de wachttijd van vliegtuigen bij landing behandeld. Aan de hand van een vereenvoudigd model van de werkelijke situatie, zoals deze zich voordoet bij het landen van vliegtuigen, wordt nagegaan, aan welke voorwaarden voldaan moet zijn, wil (behoudens een redelijke waarschijnlijkheid) voorkomen worden, dat bij het landingsbaken op Schiphol aankomende vliegtuigen in een verkeerscongestie geraken, zodat zij niet vlot kunnen landen. Ter formulering van enigszins definitieve conclusies zal het nodig zijn, waarnemingsmateriaal betreffende aankomsttijden volgens de dienstregeling en werkelijke aankomsttijden van vliegtuigen te bestuderen; materiaal hierover is nog niet beschikbaar, zodat dit rapport nog niet anders dan een voorlopig karakter kan hebben. De mathematische behandeling maakt latere aanpassing aan de gegevens mogelijk.

We kunnen voorlopig nog slechts op één vraag ingaan, en wel deze: Welk aantal vliegtuigen kunnen wij gemiddeld in een (vrij groot) tijdsinterval toelaten (dus b.v. in twee uur), wanneer we behoudens een kleine waarschijnlijkheid willen voorkomen, dat in dat grote tijdvak een opeenhoping van vliegtuigen ontstaat? Daar deze vraag gesteld wordt om enig inzicht te verkrijgen in de situatie zoals deze in de toekomst zijn zal, heeft een nauwkeurige behandeling geen zin; de toekomst is te onzeker, dan dat wij er met grote nauwkeurigheid nu conclusies over zouden kunnen trekken.

In een volgend rapport hopen wij dezelfde vraag nog op grond van andere veronderstellingen te behandelen, dan hier gedaan wordt. Na de behandeling van het probleem worden de conclusies nog eens gezamenlijk vermeld.

2. Onderstellingen en notaties.

We geven het aantal vliegtuigen dat in een tijdsinterval (t_1, t_2) bij het baken aankomt aan met $\underline{K}(t_1, t_2)$; hierbij is $t_1 < t_2$ verondersteld¹⁾. De voor een landing benodigde tijd, d.w.z. de tijd tussen twee opeenvolgende uitzendingen van het signaal, aangevende dat het eerste wachtende vliegtuig mag lan-

1) $\underline{K}(t_1, t_2)$ is een stochastische grootheid, d.i. een grootheid, die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit. Stochastische grootheden worden aangegeven door onderstreepte letters.

den, noemen we a en onderstellen we constant; a is de landings-tijd, met inachtneming van alle veiligheidsvoorzorgen; we noemen a verder kortweg de landingstijd.

De "congestietoename", die we aanduiden met $D(t_1, t_2)$ en definiëren als $aK(t_1, t_2) - (t_2 - t_1)$, stelt het verschil voor van de landingstijd, die nodig is voor de vliegtuigen, die tussen t_1 en t_2 binnenkomen en de beschikbare tijd. Bij positieve "congestietoename" is meer landingstijd nodig dan er tijd beschikbaar is, d.w.z. er ontstaat congestie of reeds bestaande congestie neemt toe. De verwachting van de "congestietoename" zal dus ≤ 0 moeten zijn, wil een toenemende congestie voorkomen worden.

Beschouwen we de aankomst van een aantal (n) vliegtuigen. Het tijdstip t_i van aankomst van het i^{de} vliegtuig hangt in de eerste plaats af van de dienstregeling. Het tijdstip van aankomst op de grond volgens de dienstregeling noemen wij a_i . We beschouwen de aankomsttijd bij het baken. Volgens de dienstregeling is deze $a_i - a$. Het tijdstip t_i kan hiervan afwijken door vertraging of vervroeging. In een gesprek met enige Schiphol-deskundigen is opgemerkt, dat vervroeging zó zelden voorkomt en in absolute duur zoveel geringer is dan vertraging, dat het voorkomen van vervroeging verwaarloosd kan worden. Mocht dit niet het geval zijn, dan kunnen we de vervroeging aldus uitschakelen: We voeren dan een fictieve dienstregeling in, die uit de bestaande dienstregeling verkregen wordt door van alle aankomsttijden een constant bedrag af te trekken. Dit bedrag wordt zo klein mogelijk gekozen, maar juist zo groot, dat we de mogelijkheid van het eerder aankomen bij het baken dan volgens de fictieve dienstregeling zou moeten gebeuren, kunnen verwaarlozen. Aankomsten bij het baken volgens de dienstregeling (of eventueel volgens de fictieve dienstregeling) noemen wij "vastgestelde aankomsten". Dit slaat zowel op aantallen aankomsten als op aankomsttijden; we spreken dus over een "vastgesteld aantal aankomsten" en een aantal "vastgestelde aankomsttijden".

We veronderstellen van de a_i , dat ze aequidistant zijn en zo dicht opeen liggen, dat wij ze homogeen over de tijd uitgesmeerd mogen denken. Deze veronderstelling over de a_i houdt in, dat we met vrij grote intervallen (t_1, t_2) moeten werken. Het "vastgestelde" aantal in een tijd $(t_2 - t_1)$ aankomende vliegtuigen is dus: $\lambda(t_2 - t_1)$, waarin λ een evenredigheidsconstante is (λ = "vastgestelde" aantal vliegtuigen, dat per tijdseenheid moet binnenkomen); λ is in werkelijkheid afhankelijk van sei-

zoen, dag en uur. We beperken ons tot spitsuren, met bepaalde verkeersintensiteit, waar λ ongeveer constant is.

Van de vertraging wordt het volgende verondersteld. We onderscheiden 2 gevallen:

1^e. Er treedt "normale vertraging" op, d.i. een niet te grote vertraging tengevolge van allerlei weinig ernstige storende invloeden;

2^e. Er treedt "ernstige vertraging" op, b.v. door te laat vertrek of omwegen bij slecht weer.

Tussen beide typen vertraging bestaat natuurlijk geen scherp onderscheid. Van geen van beide is de verdeling bekend en zelfs indien dit het geval zou zijn, is toch niet te voorspellen hoe de verdeling van de vertraging in de toekomst zijn zal. Op grond hiervan achten wij het gerechtvaardigd een sterk vereenvoudigende veronderstelling te maken betreffende de beide vertragingen. We nemen in ons model van de zich werkelijk voordoende situatie de "normale vertraging" homogeen verdeeld over het interval $0 \leq t_1 - a_1 \leq b$, waarin b enkele malen a is en de "ernstige vertraging" homogeen verdeeld over het interval $b \leq t_1 - a_1 \leq b+c$, waarin c veel groter dan a is, b.v. enkele uren (a is van de orde van 5 minuten). Hiermede wordt het volgende bedoeld: We beschouwen een bepaald spitsuur op vergelijkbare dagen gedurende enige jaren. Een fractie b.v. $1-q$ van de in dit spitsuur volgens dienstregeling aankomende vliegtuigen heeft "normale vertraging", de fractie q heeft dus "ernstige vertraging". Van de fractie $1-q$ wordt nu verondersteld, dat een vliegtuig, dat daartoe behoort, een vertraging heeft, die tussen 0 en b minuten ligt. De binnen deze limieten mogelijke vertragingen hebben alle dezelfde waarschijnlijkheid om voor te komen. Evenzo voor de fractie q : een vliegtuig, dat hiertoe behoort, heeft een vertraging tussen b en $b+c$ minuten gelegen, waarbij alle mogelijke waarden even waarschijnlijk zijn.

Strikt genomen kunnen we geen constante waarden b en c invoeren, zoals hier gedaan is, maar zouden we apart een b en c voor elk type vliegtuig en ook voor verschillende typen vluchten (over korte of heel lange afstand), moeten invoeren. Zoals al eerder gezegd is, weten we te weinig van de werkelijke situatie en in ieder geval van de toekomst af dan dat het zin heeft een dergelijk fijn onderscheid te maken. Daarom is direct voor b en c een gemiddelde (constante) waarde ingevoerd.

Opgemerkt kan nog worden dat in het voorgaande een maximale vertraging is ingevoerd. Grotere vertraging dan $(b+c)$ minuten is

volgens het model niet mogelijk, maar in werkelijkheid natuurlijk wel. Doch de mogelijkheid van een extreem grote vertraging kunnen wij gevoegelijk buiten beschouwing laten, juist omdat hij zo exceptioneel is.

De waarschijnlijkheidsdichtheid $f_i(t)$ van de werkelijke aankomsttijd van het i^{de} vliegtuig heeft nu de volgende gedaante:

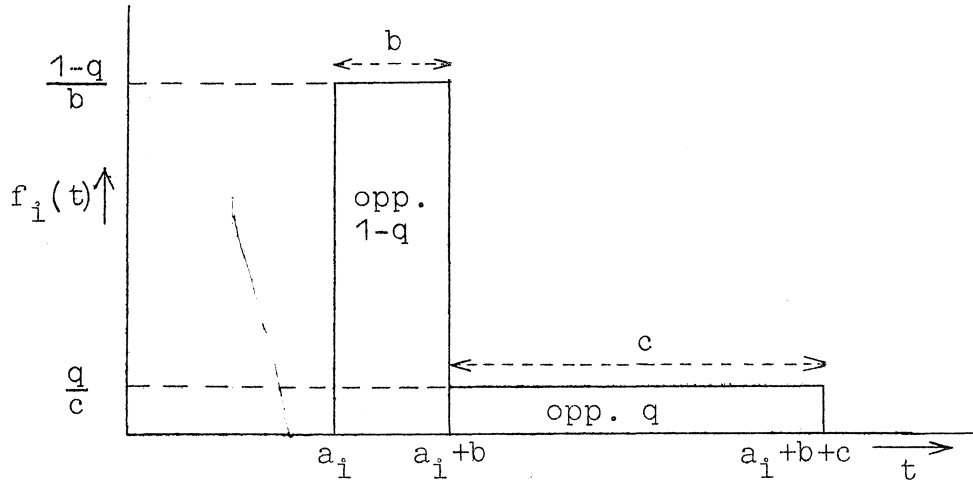


fig. 1

Hierin is a_i de "vastgestelde" aankomsttijd van het i^{de} vliegtuig en $f_i(t)dt$ stelt de kans voor, dat het i^{de} vliegtuig een \underline{t}_i heeft, met $t \leq \underline{t}_i \leq t+dt$.

Volgens onze veronderstellingen geldt:

$$(1) \quad f_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{indien } \underline{t}_i < a_i \text{ is (er is geen "vervroeging")}, \\ \frac{1-q}{b} & \text{indien } a_i < \underline{t}_i \leq a_i + b \text{ ("normale vertraging")}, \\ \frac{q}{c} & \text{indien } a_i + b < \underline{t}_i \leq a_i + b + c \text{ ("ernstige vertraging")}, \\ 0 & \text{indien } a_i + b + c < \underline{t}_i \text{ (er is "extreme vertraging")}. \end{cases}$$

Als numerieke voorbeelden zullen wij na de algemene behandeling bespreken:

1 ^e .	$a = 5 \text{ min.}$	en	2 ^e .	$a = 3 \text{ min.}$
	$b = 20 \text{ min.} = 4a$		$b = 10 \text{ min.} = 3 \frac{1}{3} a$	
	$c = 100 \text{ min.} = 20a$		$c = 100 \text{ min.} = 33 \frac{1}{3} a$	
	$q = 0,1$		$q = 0,1$	

Het eerste voorbeeld houdt in:

De landingstijd is 5 minuten;

"normale vertraging" komt in 90% van de gevallen voor en is over 0 tot 20 minuten homogeen verdeeld; "ernstige vertraging" komt in 10% van de gevallen voor en is over 20 tot 120 minuten homogeen verdeeld.

Evenzo het tweede voorbeeld:

De landingstijd is 3 minuten;

"normale vertraging" komt in 90% van de gevallen voor en is over 0 tot 10 minuten homogeen verdeeld; "ernstige vertraging" komt in 10% van de gevallen voor en is over 10 tot 110 minuten homogeen verdeeld.

Bovenstaande numerieke voorbeelden kwamen ter sprake in het reeds genoemde gesprek met de deskundigen van Schiphol. Daarbij bleek, dat genoemde waarden niet te veel van de werkelijkheid afwijken en voor een ruwe schatting voldoende basis vormen.

Wanneer we de kans, dat het i^{de} vliegtuig in het interval (t_1, t_2) aankomt p_i noemen, geldt:

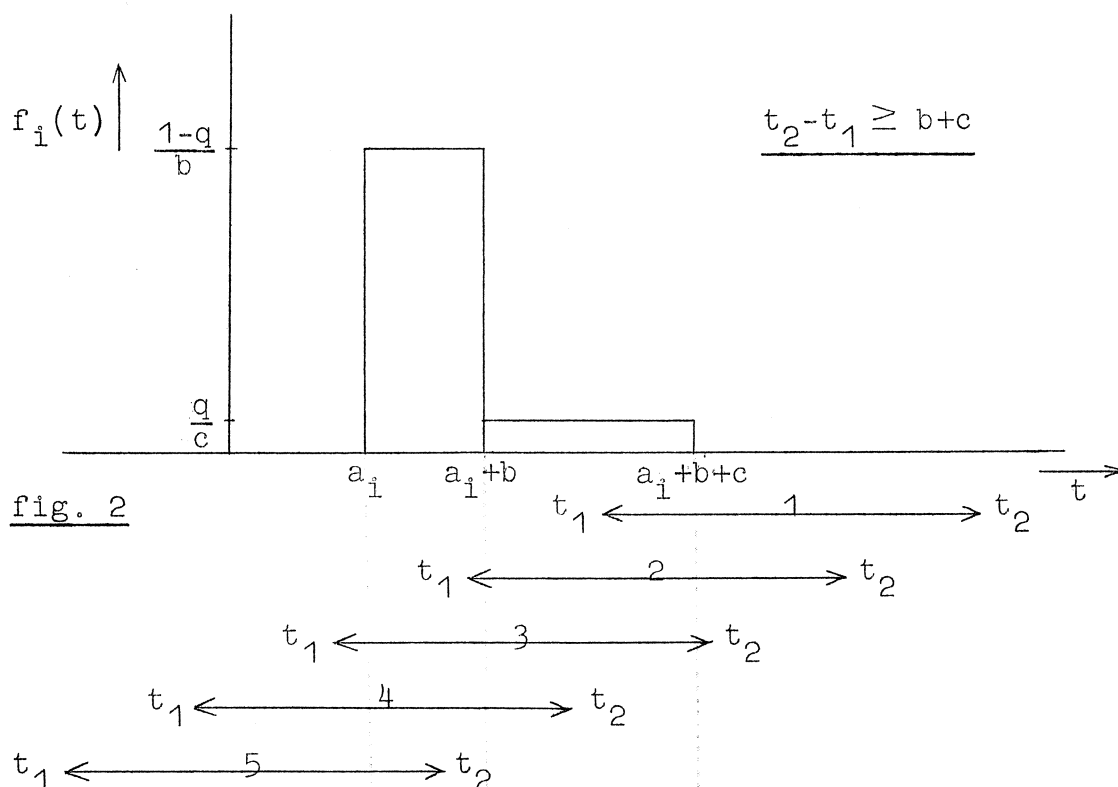
$$(2) \quad p_i = \int_{t_1}^{t_2} f_i(t) dt.$$

Voor elk van de n vliegtuigen die we beschouwen, vinden we een kans p_i , dat het in het beschouwde interval (t_1, t_2) aankomt. Het aantal vliegtuigen $K(t_1, t_2)$ dat werkelijk in het beschouwde interval aankomt is dus hetzelfde als het aantal successen bij trekkingen uit een Bernoulli-Poisson-verdeling, met kans op succes p_i bij de i^{de} trekking²⁾.

3. Beschouwing van verschillende gevallen.

Als we een interval (t_1, t_2) beschouwen, met $(t_2 - t_1) \geq b+c$, dan kunnen zich verschillende situaties voordoen, wat betreft de ligging van het interval ten opzichte van de vertragingfunctie. Gemakshalve schetsen we deze situaties zo, dat we in plaats van de functie te verschuiven ten opzichte van het vast gekozen interval, we het interval verschoven tekenen onder de functie. De volgende indeling slaat dus op één vast interval (t_1, t_2) :

2) De Bernoulli-Poisson verdeling is een generalisatie van de binomiale en de Poissonverdeling: Er worden n trekkingen gedaan uit n verschillende collecties, waarbij de kans op succes bij de i^{de} collectie p_i is. Van deze verdeling is bekend, dat het gemiddelde $m = \sum_i p_i$ is en de variantie $\sigma^2 = \sum_i p_i(1-p_i)$. Indien de p_i niet te klein zijn, niet te veel van hun gemiddelde afwijken en indien het aantal n voldoende groot is, weten we dat de verdeling bij benadering normaal is.



Uit fig. 2 kunnen wij aflezen:

1^e. Er zijn vliegtuigen die nòch door vertraging, nòch door juist op tijd te komen in het interval (t_1, t_2) kunnen aankomen. Dit zijn n.l. de vliegtuigen waarvan de "vastgestelde aankomsttijd" vroeger dan $t_1 - (b+c)$ resp. later dan t_2 is.

2^e. Er zijn vliegtuigen die tot één van de aangegeven groepen 1-5 behoren, d.w.z.:

Groep 1 vliegtuigen, waarvoor geldt $a_i + b \leq t_1 \leq a_i + b + c$,

Groep 2 vliegtuigen, waarvoor geldt $a_i \leq t_1 \leq a_i + b$,

Groep 3 vliegtuigen, waarvoor geldt $t_1 \leq a_i$ en $t_2 \geq a_i + b + c$,

Groep 4 vliegtuigen, waarvoor geldt $a_i + b \leq t_2 \leq a_i + b + c$,

Groep 5 vliegtuigen, waarvoor geldt $a_i \leq t_2 \leq a_i + b$.

Hierin is a_i de enige variabele, b en c zijn constanten en t_1 en t_2 constant gekozen. De ongelijkheden leggen dus grenzen op aan de a_i , de vastgestelde aankomsttijden. De groepen bestaan uit:

Groep 1: vliegtuigen, die alleen door "ernstige vertraging" in het beschouwde interval kunnen aankomen.

Groep 2: vliegtuigen, die bij "normale vertraging" eventueel en bij "ernstige vertraging" zeker in het interval aankomen,

Groep 3: vliegtuigen, die zeker in het interval aankomen, ook bij willekeurige vertraging,

Groep 4: vliegtuigen, die bij "normale vertraging" zeker en bij "ernstige vertraging" eventueel in het interval aankomen.

Groep 5: vliegtuigen, die slechts bij "normale vertraging" in het interval kunnen aankomen.

De p_i vinden wij, door het oppervlak van de functie boven het interval (t_1, t_2) te bepalen. De grootte van het oppervlak hangt af van de plaats van a_i ten opzichte van (t_1, t_2) ; p_i als functie van a_i ziet er aldus uit:

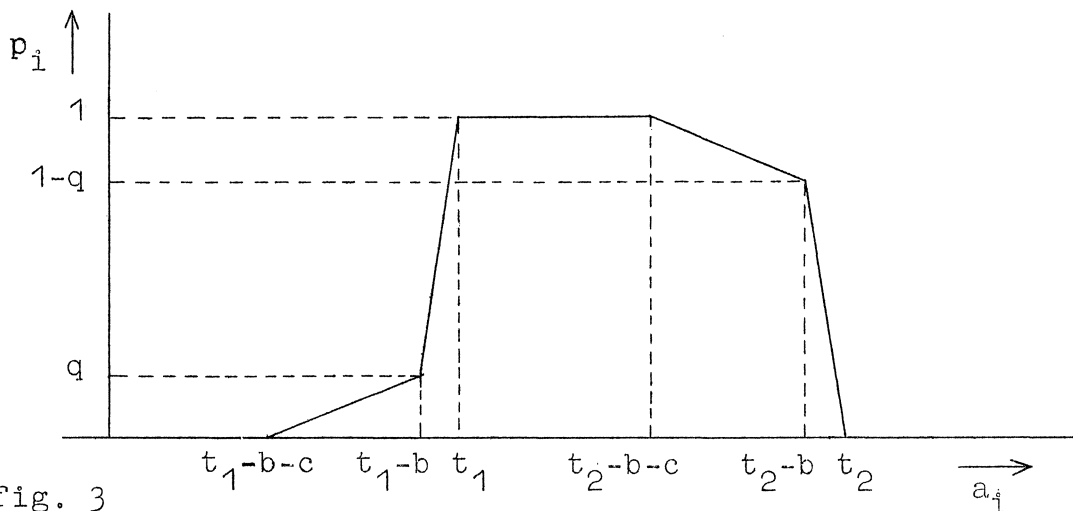


fig. 3

We kunnen nu de volgende tabel opstellen (waarbij $t_2 - t_1 = \tau$ gesteld is):

Tabel Ia

Groep	Grenzen van a_i		p_i	Grenzen van p_i		Aantal a_i
-	-	$t_1 - b - c$	0	0	0	-
1	$t_1 - b - c$	$t_1 - b$	$\frac{q}{c}(a_i + b + c - t_1)$	0	q	λc
2	$t_1 - b$	t_1	$1 - \frac{1-q}{b}(t_1 - a_i)$	q	1	λb
3	t_1	$t_2 - b - c$	1	1	1	$\lambda(\tau - b - c)$
4	$t_2 - b - c$	$t_2 - b$	$1 - \frac{q}{c}(a_i + b + c - t_2)$	1	1-q	λc
5	$t_2 - b$	t_2	$\frac{1-q}{b}(t_2 - a_i)$	1-q	0	λb
-	t_2	-	0	0	0	-

Het "aantal a_i " in tabel Ia geeft het aantal "vastgestelde aankomsttijden", dat in het beschouwde interval ligt. Volgens veronderstelling is dit λx de lengte van het interval, waarin a_i varieert. Voor groep 1 b.v. hebben wij: interval voor a_i : $(t_1 - b - c, t_1 - b)$, dus is de lengte van het interval c en het "aantal a_i ", dat in dit interval ligt λc .

Dit aantal is tevens de verwachting van het aantal \underline{t}_i in het interval $(t_1 - b - c, t_1 - b)$, dus de verwachting van $\underline{K}(t_1 - b - c, t_1 - b)$ is ook λc . De verwachting van \underline{t}_i , de i^{de} aankomsttijd, is namelijk

gelijk aan a_i plus de verwachting van de vertraging. Dit is een constante (k). Het aantal a_i in een interval geeft dus het verwachte aantal \underline{t}_i in een interval, dat over k langs de tijdas is verschoven. Daar het aantal a_i in het verschoven interval gelijk is ~~aan~~ het aantal a_i in het interval voor de verschuiving, is het aantal a_i in het verschoven interval gelijk aan het verwachte aantal \underline{t}_i in dat verschoven interval. En bij elk interval kan een interval gevonden worden, dat door verschuiving in het eerstgenoemde interval overgaat, mits we niet te dicht bij de rand van het spitsuur komen.

Keren we nu terug tot de "congestietoename". De verwachting³⁾ hiervan is:

$$\begin{aligned} (3) \quad \underline{ED}(t_1, t_2) &= E\{a\underline{K}(t_1, t_2) - (t_2 - t_1)\} = \\ &= a\underline{EK}(t_1, t_2) - (t_2 - t_1) = a\lambda(t_2 - t_1) - (t_2 - t_1) = \\ &= (a\lambda - 1)(t_2 - t_1), \text{ daar } \underline{EK}(t_1, t_2) = \lambda(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Daar $t_2 - t_1 > 0$ is, kan de "congestietoename" slechts een positieve verwachting hebben, als $a\lambda - 1 > 0$ is. Dit komt overeen met een toestand, waarbij het "vastgestelde" aantal aankomsttijden per tijdseenheid groter is, dan volgens de landingstijd mogelijk is, want volgens de landingstijd kunnen maximaal $\frac{1}{a}$ landingen per tijdseenheid plaatsvinden ($\frac{1}{a}$ = capaciteit = maximaal aantal vliegtuigen, dat per tijdseenheid kan landen). Het is niet onredelijk te achten dat in de toekomst reeds bij het opstellen van de dienstregeling door onderling overleg tussen vlieghaven en luchtvaartmaatschappij rekening zal worden gehouden met deze ongewenste toestand, zodat deze situatie buiten beschouwing kan blijven. Om bovenstaande redenen wordt dit dan ook verder gedaan. We beschouwen de situatie, waarbij λa kleiner dan 1 is, maar wel ongeveer gelijk 1, omdat dit de meest ongunstige toestand is: Per tijdseenheid moeten zoveel vliegtuigen binnenkomen, dat zelfs, wanneer ze alle op tijd komen, het maar amper mogelijk is ze te verwerken. We zullen daarom in de resultaten van de volgende berekeningen λ ongeveer gelijk aan, maar kleiner dan $\frac{1}{a}$ nemen.

Beschouwen wij tabel Ia, dan zien we dat de eerste groep bestaat uit λc vliegtuigen, met een p_i die lineair toeneemt van 0 tot q . De som $\sum \underline{p}_i$ voor deze groep is een som over λc waarden p_i , die gelijk is aan $\lambda c x$ de gemiddelde waarde van p_i ; p_i is een lineaire functie van a_i en wel geldt, zoals we uit fig. 3 zien in

3) De verwachting van een stochastische grootheid geven we aan door een E voor die grootheid te zetten.

het interval

$$(t_1-b-c, t_1-b): p_i = \frac{q}{c} \{a_i - (t_1-b-c)\}$$

Dus de gemiddelde waarde van p_i , die we met \bar{p}_i aangeven, is:

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= \frac{1}{c} \int_{t_1-b-c}^{t_1-b} \frac{q}{c} \{a_i - (t_1-b-c)\} da_i = \\ &= \frac{1}{c} \int_0^q \frac{c}{q} p_i dp_i = \frac{q}{2}, \text{ zodat } \sum_i \bar{p}_i = \frac{\lambda c q}{2}. \end{aligned}$$

Ook moeten we $\sum_i \bar{p}_i (1-p_i)$ bepalen; daar $\sum_i \bar{p}_i (1-p_i) = \sum_i \bar{p}_i - \sum_i \bar{p}_i^2$ is, behoeven wij nog slechts $\sum_i \bar{p}_i^2$ te bepalen.

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{p}_i^2 &= \lambda c \overline{p_i^2} = \lambda c x \frac{1}{c} \int_{t_1-b-c}^{t_1-b} \frac{q^2}{c^2} \{a_i - (t_1-b-c)\}^2 da_i = \\ &= \frac{\lambda q^2}{c^2} \int_0^c a_i^2 da_i = \frac{\lambda c q^2}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \sum_i \bar{p}_i (1-p_i) = \lambda c \left\{ \frac{q}{2} - \frac{q^2}{3} \right\}$$

We kunnen op deze wijze voor elke groep $\sum_i \bar{p}_i$ en $\sum_i \bar{p}_i (1-p_i)$ bepalen. Uit tabel Ia vinden wij zo tabel Ib:

Tabel Ib ⁴⁾

groep	gemiddelde van p_i	$\sum_i \bar{p}_i$	gemiddelde van $p_i (1-p_i)$	$\sum_i \bar{p}_i (1-p_i)$
1	$\frac{q}{2}$	$\frac{\lambda c q}{2}$	$\frac{q}{2} - \frac{q^2}{3}$	$\lambda c \left\{ \frac{q}{2} - \frac{q^2}{3} \right\}$
2	$\frac{1+q}{2}$	$\frac{\lambda b (1+q)}{2}$	$\frac{1-q}{2} - \frac{(1-q)^2}{3}$	$\lambda b \left\{ \frac{1-q}{2} - \frac{(1-q)^2}{3} \right\}$
3	1	$\lambda (\tau - b - c)$	0	0
4	$1 - \frac{q}{2}$	$\frac{\lambda c (2-q)}{2}$	$\frac{q}{2} - \frac{q^2}{3}$	$\lambda c \left\{ \frac{q}{2} - \frac{q^2}{3} \right\}$
5	$\frac{1-q}{2}$	$\frac{\lambda b (1-q)}{2}$	$\frac{1-q}{2} - \frac{(1-q)^2}{3}$	$\lambda b \left\{ \frac{1-q}{2} - \frac{(1-q)^2}{3} \right\}$

4) Ter verduidelijking: hebben wij een lineaire functie p_i van a_i , die in het interval (T_1, T_2) beschouwd wordt en daarop in T_1 de waarde α , in T_2 de waarde β aanneemt, dan is dus

$p_i = \frac{\beta - \alpha}{T_2 - T_1} a_i + \frac{\alpha T_2 - \beta T_1}{T_2 - T_1}$. De gemiddelde waarde van p_i^n , dus \bar{p}_i^n over het interval (T_1, T_2) is dan:

(zie vervolg van deze voetnoot op pagina 9a)

(vervolg voetnoot 4)

$$\begin{aligned}
 \overline{p_i^n} &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \left\{ \frac{\beta - \alpha}{T_2 - T_1} a_i + \frac{\alpha T_2 - \beta T_1}{T_2 - T_1} \right\}^n da_i = \\
 &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{T_2 - T_1}{\beta - \alpha} p_i^n dp_i = \frac{1}{\beta - \alpha} \left[\frac{p_i^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^{\beta} = \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}.
 \end{aligned}$$

Zo is dus:

$$\begin{aligned}
 \overline{p_i} &= \frac{\beta + \alpha}{2}, \\
 \overline{p_i^2} &= \frac{\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{3}, \\
 \overline{p_i^3} &= \frac{\beta^3 + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \alpha^3}{4}, \\
 \overline{p_i^4} &= \frac{\beta^4 + \alpha\beta^3 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta + \alpha^4}{5}, \text{ enz.}
 \end{aligned}$$

. Door sommatie van $\sum_i p_i$ over de groepen vinden wij voor het verwachte aantal vliegtuigen in (t_1, t_2) : $\lambda (t_2 - t_1)$ (dit wisten we reeds) en voor de variantie σ^2 door sommatie van $\sum_i p_i(1-p_i)$ over de groepen:

$$(4) \quad \sigma^2 = \frac{\lambda}{3} \{cq(3-2q) + b(1-q)(1+2q)\}.$$

Dit is dus de variantie van het aantal aankomsten per tijdvak $\tau = t_2 - t_1$. We zien, dat het gemiddelde niet van b en c afhangt, de spreiding niet van τ . Dit kunnen we als volgt verklaren:

We hebben reeds aangetoond, dat het aantal "vastgestelde" aankomsten in een tijdsinterval overeenkomt met de verwachting van het aantal aankomsten in dat interval. Het "vastgestelde" aantal hangt niet af van b en c, dus ook het verwachte aantal niet. De variantie σ^2 heeft voor $\tau = t_2 - t_1 = b+c$ een zekere waarde. Deze verandert bij vergroten van τ niet, omdat alleen het aantal verwachte vliegtuigen van groep 3 toeneemt en deze groep draagt niet bij tot de variantie, omdat de tot groep 3 behorende vliegtuigen zeker aankomen in het interval (t_1, t_2) .

We kunnen een indruk krijgen van de approximatie tot normaliteit, door na te gaan of de som van de absolute derde momenten t.o.v. het gemiddelde, die we A zullen noemen, klein is t.o.v. σ^3 . Is hieraan voldaan, dan is de verdeling bij benadering normaal.

Voor een alternatief (waarbij p_i = kans op succes, $1-p_i$ = kans op mislukking) is het absolute derde moment α_{3i} :

$$(5) \quad \alpha_{3i} = p_i(1-p_i)^3 + (1-p_i)p_i^3 = p_i(1-p_i) - 2p_i^2(1-p_i)^2.$$

In het model bepalen we eerst voor elke groep het absolute derde moment, daarna sommeren we over de groepen. We vinden dus:

$$(6) \quad A = \sum_{gr} \sum_i \{p_i(1-p_i) - 2p_i^2(1-p_i)^2\} = \\ = \sum_{gr} \sum_i \left\{ p_i - 3p_i^2 + 4p_i^3 - 2p_i^4 \right\}, \text{ waarbij } \sum_i \text{ de som-} \\ \text{matie in elk der groepen weergeeft en } \sum_{gr} \text{ de sommatie over de groe-} \\ \text{pen.}$$

In ons geval dragen de groepen 1 en 4 elk bij $(\frac{1}{2}q - q^2 + q^3 - \frac{2}{5}q^4) \lambda c$, wat we aldus kunnen inzien.

Voor groep 1 geldt: $\sum_i p_i^n = \lambda c \bar{p}_1^n = \lambda c \cdot \frac{1}{n+1} \frac{q^{n+1}}{q}$ (zie voetnoot 4, $\alpha = 0$, $\beta = q$) = $\frac{\lambda c q^n}{n+1}$.

$$\text{Dus is } \sum_i \{p_i - 3p_i^2 + 4p_i^3 - 2p_i^4\} = \lambda c \left\{ \frac{q}{2} - q^2 + q^3 - \frac{2}{5}q^4 \right\}.$$

Op analoge wijze kunnen wij voor groep 4 hetzelfde resultaat afleiden.

Groep 3 geeft geen bijdrage, daar alle p_i gelijk 1 zijn, zodat $\sum_i \{p_i - 3p_i^2 + 4p_i^3 - 2p_i^4\} = \lambda(t_2 - t_1 - b - c)(1 - 3 + 4 - 2) = 0$.

De bijdrage van groepen 2 en 5 kan uit die van de groepen 1 en 4 gevonden worden, door daarin c door b en q door $1-q$ te vervangen. De bijdrage van 2 en 5 elk is dus:

$$\left\{ \frac{1}{2}(1-q) - (1-q)^2 + (1-q)^3 - \frac{2}{5}(1-q)^4 \right\} \lambda b = \\ = \frac{\lambda b}{10} (1-q)(1+2q-2q^2+4q^3).$$

Dus is

$$(7) \quad A = \frac{1}{5} \lambda \left\{ cq(5-10q+10q^2-4q^3) + \right. \\ \left. + b(1-q)(1+2q-2q^2+4q^3) \right\}.$$

Passen we dit toe op getallenvoorbeeld 1:

$a = 5$ min., $b = 20$ min., $c = 100$ min., $q = 0,1$, dan vinden we $\lambda \approx \frac{1}{a} = \frac{1}{5}$, $A \approx 12,5$, $\lambda \approx 2,5$, $\sigma^2 \approx 16,5$, $\lambda \approx 3,3$, $\sigma \approx 1,8$, $\frac{A}{\sigma^3} \approx \frac{2,5}{5,9} \approx 0,42$.

Getallenvoorbeeld 2 geeft:

$a = 3$ min., $b = 10$ min., $c = 100$ min., $q = 0,1$, $\lambda \approx \frac{1}{a} = \frac{1}{3}$, $A \approx 10,3$, $\lambda \approx 3,4$, $\sigma^2 \approx 12,9$, $\lambda \approx 4,3$, $\sigma \approx 2,1$, $\frac{A}{\sigma^3} \approx \frac{3,4}{9,0} \approx 0,38$.

Voor een periode van twee uur geldt dus het volgende:

De verdeling van het aantal in (t_1, t_2) aankomende vliegtuigen kan met een normale verdeling benaderd worden in beide voorbeelden.

We krijgen een betere indruk van de normaliteit door het gestandaardiseerde derde en vierde moment van de verdeling van het aantal in (t_1, t_2) aankomende vliegtuigen te bepalen, waarbij $t_2 - t_1 = b + c$. Voor een normale verdeling moeten we resp. 0 en 3 vinden. Hier vinden we 0 en 3,08 bij het eerste voorbeeld, bij het tweede resp. 0 en 3,09. Het derde moment blijkt identiek 0 te zijn onafhankelijk van b en c . Het gestandaardiseerde vierde moment verschilt slechts zo weinig van 3 dat verwaarlozing van het verschil met de normale verdeling zeker verantwoord is.

Bij het eerste voorbeeld kunnen maximaal ongeveer $\frac{120}{5} = 24$ vliegtuigen verwerkt worden. Trekken we hiervan 2 maal de spreiding σ af, dan vinden we het aantal vliegtuigen, dat we per twee uur mogen toelaten, wanneer we behoudens een kans van 0,023 (d.i. behoudens in gemiddeld 1 op de 43 gevallen) toenemende ver-

keerscongestie wensen te voorkomen. Het toegelaten aantal wordt dus: $24 - 2 \times 1,8 \approx 20$ per 2 uur. Ten gevolge van de afwijkingen van de normaliteit zal dit aantal vermoedelijk nog lager gekozen moeten worden. Ook leggen veiligheid en bedrijfszekerheid nog verdere beperkingen op.

Het tweede voorbeeld geeft als toegelaten aantal vliegtuigen per twee uur, daar de capaciteit $\frac{120}{3} = 40$ vliegtuigen per twee uur is, $\frac{120}{3} - 2 \times 2,1 \times \frac{120}{110} \approx 35$, met een kans van 0,023 op toenemende verkeerscongestie.

Nemen we in plaats van $2\sigma 2,4\sigma$, dan vinden we het toegelaten aantal vliegtuigen per twee uur, met een kleinere kans op congestie, nl. 0,0082 hetgeen zeggen wil, dat we rekening moeten houden met congestie in gemiddeld 1 op 120 gevallen. Met $2,8\sigma$ wordt de kans op congestie 0,0026, zodat congestie verwacht mag worden in gemiddeld 1 op 380 gevallen.

Hier vinden we:

1^e voorbeeld: behoudens een kans op congestie van 0,0082 is het toegelaten aantal vliegtuigen per twee uur: $24 - 2,4 \times 1,8 \approx 19$ en behoudens een kans 0,0026: $24 - 2,8 \times 1,8 \approx 19$.

2^e voorbeeld: behoudens een kans op congestie van 0,0082 is het toegelaten aantal vliegtuigen per twee uur: $40 - 2,4 \times 2,1 \times \frac{120}{110} \approx 34$ en behoudens een kans 0,0026: $40 - 2,8 \times 2,1 \times \frac{120}{110} \approx 33$.

Wanneer we (4) en (7) beschouwen, blijkt dat voor constante q en constante λ , bij evenredige variatie van a, b en c de σ^2 , dus ook de σ en de $\frac{A}{\sigma^3}$, constant blijven. Bij verkorting van de landingstijd a zullen we b.v. door evenredige verkleining van b en c σ^2 op dezelfde waarde kunnen houden. De "ernstige vertraging", die van de orde c is, zal waarschijnlijk slechts weinig verkleind kunnen worden, de kans q en b echter misschien meer, zodat, mits die verkleining voldoende drastisch is, $\sigma^2 \approx \lambda c q$ wordt, waarbij q vrij klein is.

Een werkelijk kleine σ eist dus: per tijdseenheid weinig aankomende vliegtuigen, kleine "normale vertraging", kleine kans op "ernstige vertraging" onder alle weersgesteldheden. Qualitatief is dit ook direct intuïtief in te zien.

Bereikt is nu, dat we voor een periode van twee uur het toelaatbare aantal vliegtuigen ongeveer kennen (toelaatbaar in die zin, dat we behoudens een waarschijnlijkheid van b.v. 0,023 geen te groot aantal aankomsten in een periode van twee uur behoeven te verwachten), maar binnen één of een half uur kan nog een aanzienlijke congestie ontstaan. We beperkten ons dus tot

$\tau = t_2 - t_1 \geq b + c$. Vooropgesteld dat onze voorwaarden ook voor de andere gevallen vervuld blijven, kunnen we met behulp van de volgende tabellen II, III en IV in de gevallen resp. $c \leq \tau \leq b + c$, $b \leq \tau \leq c$, $0 \leq \tau \leq b$ uitdrukkingen voor de spreidingen afleiden langs volkomen analoge weg als bij tabel I gedaan is. Volledigheidshalve geven we hier alle varianties ($t_2 - t_1$ is door τ vervangen): (zie de bladzijden 13a en 13b).

De tabellen zijn afgeleid aan de hand van de volgende, met figuur 2 analoge figuren:

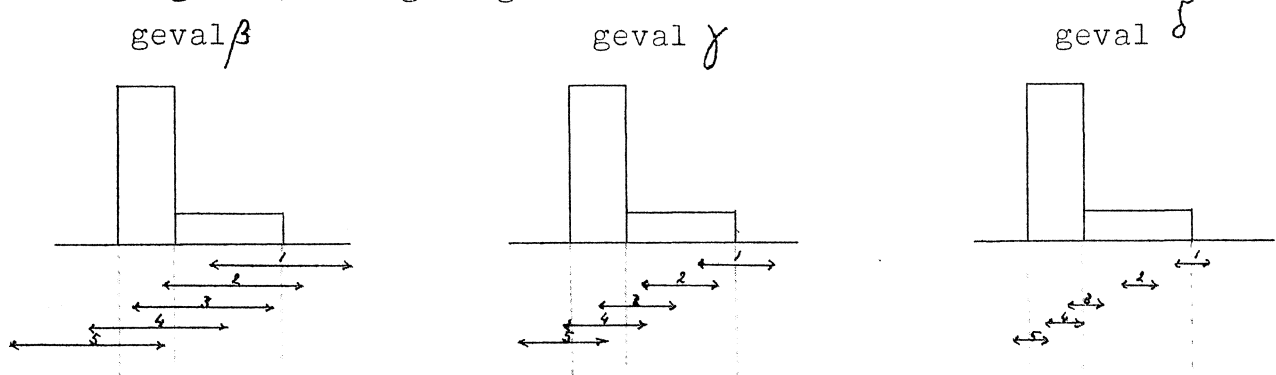


fig. 4

We zullen de normaliteit niet opnieuw onderzoeken: als $\tau = t_2 - t_1$ tot 0 nadert, gaat de verdeling van het aantal aankomsten in tijd τ over in een Poisson-verdeling met parameter $\lambda\tau$.

Bij de tabellen kan nog opgemerkt worden, dat de tabellen I, III en IV behoudens verwisseling van de groepen in zichzelf overgaan bij gelijktijdige verwisseling van b en c en van q en $1-q$. De reden hiervan is de symmetrie van de ongelijkheden voor τ , in b en c . Bij tabel II (geval β) ontbreekt deze. De symmetrie is ook aanwezig in de varianties, behalve in geval β .

Wij geven nog enkele numerieke resultaten, waarbij we opnieuw als voorbeelden gebruiken:

1^0 $a = 5$ min.	2^0 $a = 3$ min.
$b = 20$ min.	$b = 10$ min.
$c = 100$ min.	$c = 100$ min.
$q = 0,1$	$q = 0,1$
$\lambda = \frac{1}{5} \text{ min.}^{-1}$	$\lambda = \frac{1}{3} \text{ min.}^{-1}$

In tabel V zijn de voor beide gevallen op grond van (8) berekende waarden van σ gegeven. Tevens is ter vergelijking der onderlinge waarden $\frac{120 \sigma}{\tau}$ vermeld, d.i. de spreiding in het aantal vliegtuigen, dat per periode τ binnenkomt, omgerekend op een periode van twee uur.

$$\begin{aligned}
 \alpha) \quad b + c \leq \tau \quad \sigma^2 &= \frac{\lambda}{3} \left\{ b(1-q)(1+2q) + cq(3-2q) \right\} \\
 \beta) \quad c \leq \tau \leq b+c \quad \sigma^2 &= \frac{\lambda}{3} \left[\frac{q(1-q)}{bc} \tau^3 - \frac{3(b+c)}{bc} q(1-q) \tau^2 - 3q(1-q) \left\{ 2 + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right\} \tau + \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ b(1-q)^2 + cq^2 - q(1-q) \left(\frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{c} \right) \right\} \right] \\
 \gamma) \quad b \leq \tau \leq c \quad \sigma^2 &= \frac{\lambda}{3} \left[\frac{q^2 \tau^3}{c^2} - \frac{3q}{c} \tau^2 + 3q \left\{ 1 + (1-q) \left(1 + \frac{b}{c} \right) \right\} \tau + b(1-q) \left(1 - q - \frac{qb}{c} \right) \right] \\
 \delta) \quad 0 \leq \tau \leq b \quad \sigma^2 &= \frac{\lambda}{3} \left[\left\{ \frac{q^2}{c^2} + \frac{(1-q)^2}{b^2} - \frac{q(1-q)}{bc} \right\} \tau^3 - 3 \left\{ \frac{q^2}{c} + \frac{(1-q)^2}{b} \right\} \tau^2 + 3\tau \right]
 \end{aligned}$$

Tabel II (geval β)

Groep	Grenzen van a_i		p_i	Grenzen van p_i		Aantal a_i
-	-	$t_1 - b - c$	0	0	0	0
1	$t_1 - b - c$	$t_1 - b$	$\frac{q}{c}(a_i + b + c - t_1)$	0	q	λc
2	$t_1 - b$	$t_2 - b - c$	$q + \frac{1-q}{b}(a_i + b - t_1)$	q	$q + \frac{1-q}{b}(t_2 - t_1 - c)$	$\lambda(t_2 - t_1 - c)$
3	$t_2 - b - c$	t_1	$(a_i + b - t_1) \frac{1-q}{b} + (t_2 - a_i - b) \frac{q}{c}$	$(t_2 - t_1 - c) \frac{1-q}{b} + q$	$1 - q + (t_2 - t_1 - b) \frac{q}{c}$	$\lambda(b + c + t_1 - t_2)$
4	t_1	$t_2 - b$	$1 - q + \frac{q}{c}(t_2 - a_i - b)$	$1 - q + (t_2 - t_1 - b) \frac{q}{c}$	$1 - q$	$\lambda(t_2 - t_1 - b)$
5	$t_2 - b$	t_2	$(t_2 - a_i) \frac{1-q}{b}$	$1 - q$	0	λb
-	t_2	-	0	0	0	-

Tabel III (geval γ)

Groep	Grenzen van a_i		p_i	Grenzen van p_i		Aantal a_i
-	-	t_1-b-c	0	0	0	-
1	t_1-b-c	t_2-b-c	$\frac{q}{c}(a_i+b+c-t_1)$	0	$\frac{q}{c}(t_2-t_1)$	$\lambda(t_2-t_1)$
2	t_2-b-c	t_1-b	$\frac{q}{c}(t_2-t_1)$	$\frac{q}{c}(t_2-t_1)$	$\frac{q}{c}(t_2-t_1)$	$\lambda(c-t_2+t_1)$
3	t_1-b	t_1	$\frac{1-q}{b}(a_i+b-t_1)+\frac{q}{c}(t_2-a_i-b)$	$\frac{q}{c}(t_2-t_1)$	$1-q+\frac{q}{c}(t_2-t_1-b)$	λb
4	t_1	t_2-b	$1-q+\frac{q}{c}(t_2-a_i-b)$	$1-q+\frac{q}{c}(t_2-t_1-b)$	$1-q$	$\lambda(t_2-t_1-b)$
5	t_2-b	t_2	$\frac{1-q}{b}(t_2-a_i)$	$1-q$	0	λb
-	t_2	-	0	0	0	-

Tabel IV (geval δ)

Groep	Grenzen van a_i		p_i	Grenzen van p_i		Aantal a_i
-	-	t_1-b-c	0	0	0	-
1	t_1-b-c	t_2-b-c	$\frac{q}{c}(a_i+b+c-t_1)$	0	$\frac{q}{c}(t_2-t_1)$	$\lambda(t_2-t_1)$
2	t_2-b-c	t_1-b	$\frac{q}{c}(t_2-t_1)$	$\frac{q}{c}(t_2-t_1)$	$\frac{q}{c}(t_2-t_1)$	$\lambda(c-t_2+t_1)$
3	t_1-b	t_2-b	$\frac{1-q}{b}(a_i+b-t_1)+\frac{q}{c}(t_2-a_i-b)$	$\frac{q}{c}(t_2-t_1)$	$\frac{1-q}{b}(t_2-t_1)$	$\lambda(t_2-t_1)$
4	t_2-b	t_1	$\frac{1-q}{b}(t_2-t_1)$	$\frac{1-q}{b}(t_2-t_1)$	$\frac{1-q}{b}(t_2-t_1)$	$\lambda(b-t_2+t_1)$
5	t_1	t_2	$\frac{1-q}{b}(t_2-a_i)$	$\frac{1-q}{b}(t_2-t_1)$	0	$\lambda(t_2-t_1)$
-	t_2	-	0	0	0	-

Tabel V

1 ^e voorbeeld Capaciteit 24 vliegtuigen/ 2 uur			2 ^e voorbeeld Capaciteit 40 vliegtuigen/ 2 uur		
τ	σ	$\frac{120 \sigma}{\tau}$	τ	σ	$\frac{120 \sigma}{\tau}$
120	1,8	1,8	110	2,1	2,3
100	1,8	2,15	100	2,1	2,5
80	1,8	2,7	77,5	2,0	3,1
60	1,7	3,4	55	1,9	4,15
40	1,55	4,65			
20	1,3	7,8	32,5	1,65	6,1
10	1,15	13,8	10	1,25	15,0
0	0	∞	0	0	∞

We zien hieruit duidelijk, dat voor een korte periode τ de methode bij het eerste geval gebruikt, geen toepassing kan vinden: $\frac{120 \sigma}{\tau}$ neemt voor kleinere τ een steeds grotere waarde aan.

4. Andere onderstelling omtrent de vertragingen.

Tot nu toe beperkten we ons tot één bepaalde veronderstelling voor de waarschijnlijkheidsdichtheid voor de vertraging. We kunnen deze uit $f_1(t)$ (zie (1)) verkrijgen, door daarin $a_1 = 0$ te substitueren.

Voor een willekeurige verdelingsdichtheid, die slechts op een interval $(0, R)$ ongelijk nul is, kan afgeleid worden, dat de variantie σ^2 van het aantal in τ aankomende vliegtuigen gegeven wordt door:

$$(9) \quad \sigma^2 = \lambda \left\{ \tau - 2 \int_0^{\tau} (\tau - y) dy \int_y^R f(x) f(x - y) dx \right\} \quad \text{indien } \tau \leq R,$$

$$(9') \quad \sigma^2 = \lambda \left\{ R - 2 \int_0^R (R - y) dy \int_y^R f(x) f(x - y) dx \right\} \quad \text{indien } \tau \geq R.$$

In (9) mag R ook wel door ∞ vervangen worden, mits $f(x)$ voor $x \rightarrow \infty$ voldoende snel naar nul gaat.

Vergelijken we b.v. eens:

$$(10) \quad f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

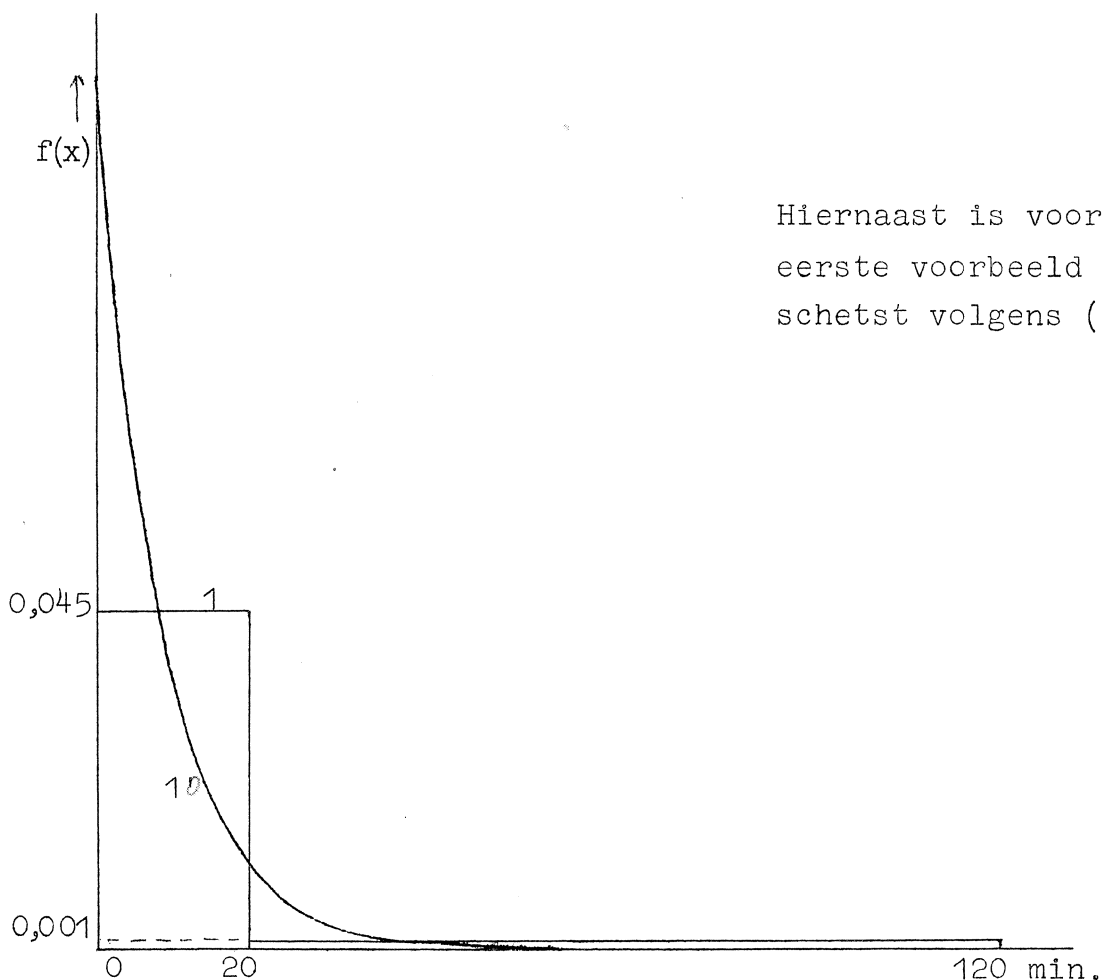
met de eerder berekende resultaten, die dus berusten op

$$(1') \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1-q}{b} & 0 < x < b \\ \frac{q}{c} & b < x < b+c \\ 0 & b+c < x \end{cases}$$

Vooraf dient opgemerkt te worden, dat (10) voor werkelijke toepassing niet zo geschikt is, daar voor niet te kleine α $f(x)$ voor $x > 0$ zeer snel naar nul nadert, wat in de praktijk zou neerkomen op een kleine "normale vertraging" en een zeer kleine kans op "ernstige vertraging". We kunnen met (10) echter wel een indruk krijgen van de gevoeligheid van σ voor $f(x)$.

We bepalen α ter vergelijking met het eerste voorbeeld uit: $\int_0^{20} f(x) dx = 0,9$, ter vergelijking met het tweede voorbeeld uit: $\int_0^{10} f(x) dx = 0,9$.

We passen dus (10) aan de situatie aan, door de kans op dezelfde maximale "normale vertraging" even groot te maken als bij (1). De landingstijden nemen we als in de eerder gegeven voorbeelden.



Hiernaast is voor het eerste voorbeeld $f(x)$ geschetst volgens (1') en (10).

Uit (9) berekenen we:

$$(11) \quad \sigma^2 = \frac{\lambda}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \tau})$$

In tabel VI geven we de waarden van σ en van $\frac{120\sigma}{\tau}$ als functies van die van τ , waarbij de laatstgenoemde gelijk gekozen zijn aan de waarden van τ uit tabel V.

Tabel VI

$\lambda = \frac{1}{5} \quad \alpha = 0,1151$			$\lambda = \frac{1}{3} \quad \alpha = 0,2303$		
τ	σ	$\frac{120\sigma}{\tau}$	τ	σ	$\frac{120\sigma}{\tau}$
120	1,32	1,32	110	1,20	1,31
100	1,32	1,58	100	1,20	1,44
80	1,32	1,98	77,5	1,20	1,86
60	1,32	2,63	55	1,20	2,62
40	1,31	3,93	32,5	1,20	4,44
20	1,25	7,50	10	1,14	13,69
10	1,09	15,8	0	0	∞
0	0	∞			

We kunnen de berekende waarden uit Tabel V en Tabel VI uitzetten in een grafiek (zie grafiek 1).

Zoals te verwachten was, loopt de curve σ tegen τ volgens (1') boven de tweede curve, berekend uit (10). Voor $\frac{120\sigma}{\tau}$ tegen τ geldt dit dan dus eveneens.

Bij de laatste curven valt de zeer steile klim van $\frac{120\sigma}{\tau}$ op bij het tot nul naderen van τ .

We zien dat, hoewel de functies (1) en (10) sterk uiteenlopen, de invloed op σ niet groter is dan een factor 2 in het ongunstigste geval.

5. Invloed van vergroting van q en c.

Beschouwen we nogmaals (8), speciaal voor $\tau \geq b+c$. Het gemiddelde aantal aankomsten in tijd τ is dan $\lambda \tau$, de variantie:

$$(4) \quad \sigma^2 = \frac{\lambda}{3} \left\{ b(1-q)(1+2q) + cq(3-2q) \right\}.$$

Wat gebeurt er wanneer we q vergroten?

Bij constante b, c en λ wordt bij vergroting van q σ^2 groter, zolang $q \leq \frac{1}{4}$ is, daar $(1-q)(1+2q)$ zijn maximum bij $q = \frac{1}{4}$ heeft en $q(3-2q)$ bij $q = \frac{3}{4}$.

Beschouwen we als uiterste geval $q = \frac{1}{4}$.

$$\sigma^2 = \frac{\lambda}{3} \left\{ b \left(1 - \frac{1}{4} \right) \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \right) + c \cdot \frac{1}{4} \left(3 - 2 \cdot \frac{1}{4} \right) \right\}$$

Indien we de oorspronkelijke waarden voor b en c aanhouden, vinden we bij het eerste voorbeeld:

$$a = 5, \lambda \approx \frac{1}{5}, b = 20, c = 100, q = 0,25:$$

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \left\{ 20 \times 0,75 \times 1,5 + 100 \times 0,25 \times 2,5 \right\} \approx 5,67, \text{ dus}$$

$$\sigma \approx 2,4.$$

Bij het tweede voorbeeld:

$$a = 3, \lambda \approx \frac{1}{3}, b = 10, c = 100, q = 0,25:$$

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \left\{ 10 \times 0,75 \times 1,5 + 100 \times 0,25 \times 2,5 \right\} \approx 8,19, \text{ dus}$$

$$\sigma \approx 2,9.$$

De gemiddeld toegelaten aantallen vliegtuigen per twee uur zijn bij deze veel ruimere keus van q, indien we opnieuw behoudens een waarschijnlijkheid van resp. 0,023, 0,0082 en 0,0026 op congestie rekenen: bij het eerste voorbeeld:

$$\text{capaciteit} - 2 \quad \sigma \approx 24 - 2 \times 2,4 \approx 19 \text{ vliegtuigen/2 uur}$$

$$\text{capaciteit} - 2,4 \sigma \approx 24 - 2,4 \times 2,4 \approx 18 \quad \text{"} \quad /2 \text{ uur}$$

$$\text{capaciteit} - 2,8 \sigma \approx 24 - 2,8 \times 2,4 \approx 17 \quad \text{"} \quad /2 \text{ uur}$$

en bij het tweede voorbeeld:

$$\text{capaciteit} - 2 \quad \sigma \approx 40 - 2 \times 2,9 \times \frac{120}{110} \approx 34 \text{ vliegt.}/2 \text{ uur}$$

$$\text{capaciteit} - 2,4 \sigma \approx 40 - 2,4 \times 2,9 \times \frac{120}{110} \approx 32 \quad \text{"} \quad /2 \text{ uur}$$

$$\text{capaciteit} - 2,8 \sigma \approx 40 - 2,8 \times 2,9 \times \frac{120}{110} \approx 31 \quad \text{"} \quad /2 \text{ uur.}$$

De vergroting van q heeft dus ten gevolge dat, hoewel natuurlijk het toelaatbare aantal vliegtuigen daalt, dit slechts in geringe mate het geval is.

Gaan we nog een stap verder en vergroten we behalve q ook c, dan krijgen we het volgende:

$$\text{Eerste voorbeeld: } a = 5, \lambda \approx \frac{1}{5}, b = 20, c = 180, q = 0,25:$$

$$\rightarrow \sigma^2 \approx \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \left\{ 20 \times 0,75 \times 1,5 + 180 \times 0,25 \times 2,5 \right\} \approx 9,00, \text{ dus}$$

$$\sigma \approx 3,0. \quad (\sigma \approx 2,8 \text{ med formule (8f)})$$

$$\text{Tweede voorbeeld: } a = 3, \lambda \approx \frac{1}{3}, b = 10, c = 180, q = 0,25:$$

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \left\{ 10 \times 0,75 \times 1,5 + 180 \times 0,25 \times 2,5 \right\} \approx 13,75, \text{ dus}$$

$$\sigma \approx 3,7. \quad (\sigma \approx 3,5 \text{ med formule (8f)})$$

Het aantal toegelaten vliegtuigen per twee uur wordt dienovereenkomstig resp. met kans op congestie 0,023, 0,0082 en 0,0026:

$$\begin{array}{llll} \text{In het 1}^{\text{e}} \text{ geval: } & 24 - 2 \times 3,0 \approx 18 \text{ vliegtuigen/2 uur} & 18 \text{ med (8f)} \\ & 24 - 2,4 \times 3,0 \approx 16 \quad \text{"} & /2 \text{ uur} & 17 \text{ " (8f)} \\ & 24 - 2,8 \times 3,0 \approx 15 \quad \text{"} & /2 \text{ uur.} & 16 \text{ " (8f)} \end{array}$$

33 ~~med(8j)~~ → In het 2^e geval: $40 - 2 \times 3,7 \times \frac{120}{110} \approx 32$ vliegtuigen/2 uur
31 ~~med(8j)~~ → $40 - 2,4 \times 3,7 \times \frac{120}{110} \approx 30,3'$ " /2 uur
30 ~~med(8j)~~ → $40 - 2,8 \times 3,7 \times \frac{120}{110} \approx 28,25$ " /2 uur

We zien hieruit, dat het model bij vrij sterke variatie van de essentiële grootheden slechts een naar verhouding geringe variatie in de spreiding vertoont. Dit wettigt het vermoeden, dat de gevonden resultaten een vrij getrouwe afspiegeling van de werkelijkheid zullen vormen.

6. Conclusies.

Dit rapport heeft niet de pretentie exacte resultaten te geven. We kunnen slechts op redelijke vermoedens berustende schattingen geven. Dit is onvermijdelijk, daar het in de bedoeling ligt uit de gevonden resultaten conclusies met betrekking tot de toekomst te trekken en daar slechts met nog in die toekomst verborgen gegevens een werkelijk juist oordeel te geven is.

Het volgende is gedaan: Op grond van een eenvoudig model van de werkelijke situatie, dat verkregen wordt door de "vastgestelde" aankomsttijden over een groot tijdsinterval homogeen uitgesmeerd te denken (een spitsuur met een lengte van 4 tot 6 uur b.v.), wat in de praktijk betekent, dat de aankomsttijden aequidistant zijn, kan bij aanname van een eenvoudige functie voor de verdeling van de vertraging afgeleid worden, dat bij een capaciteit van 24 vliegtuigen per twee uur, dus een landings-tijd van 5 minuten, het aantal toegelaten vliegtuigen in die twee uur op 18 gesteld mag worden. Bij een capaciteit van 40 vliegtuigen per twee uur, dus een landingstijd van 3 minuten, op 33 vliegtuigen per twee uur.

Indien deze aantallen aangehouden worden, is men er zeker van dat behoudens een waarschijnlijkheid 0,023, d.w.z. behoudens in 1 op de 43 gevallen het maximale aantal per twee uur verwerkbare vliegtuigen niet overschreden wordt. Hierbij is verder nog ondersteld, dat niet meer dan 25% van de vliegtuigen een tussen ^{20 minuten} 20 minuten en ^{240 minuten} 3 uur gelegen vertraging heeft en de overige vliegtuigen een tussen 0 en 20 minuten gelegen vertraging.

Kiezen we een kleinere kans op congestie, b.v. 0,0082 of 0,0026; wat betekent, dat we resp. gemiddeld in 1 op 120 of 1 op 380 gevallen congestie kunnen verwachten, dan worden de aantallen toegelaten vliegtuigen per twee uur bij een capaciteit van 24 vliegtuigen per twee uur bij een kans van 0.0082 op con-

gestie ~~15~~ en bij een kans van 0,0026 op congestie ~~15~~. Bij een capaciteit van 40 vliegtuigen per twee uur en een kans van 0,0082 op congestie ~~30~~ en bij een kans van 0,0026 op congestie ~~30~~.

Weliswaar is te verwachten, dat de werkelijke situatie niet zo ongunstig is als in de laatste onderstelling, maar toch mogen de gegeven grenzen bij de gegeven betrouwbaarheidsgrens niet anders dan als maxima gezien worden. De eerste veronderstelling betreffende het aequidistant zijn der "vastgestelde" aankomsttijden, d.w.z. de aankomsttijden volgens de dienstregeling, is namelijk op het ogenblik zeker niet vervuld, maar mag toch wel als een in de toekomst nastreefbaar doel gezien worden.

Totdat aan deze voorwaarde voldaan is, zal dus een van aequidistantie vrij sterk afwijkende verdeling der "vastgestelde" aankomsttijden meer in overeenstemming met de werkelijkheid zijn. Dit zal het toegelaten aantal vliegtuigen bij dezelfde capaciteiten belangrijk minder maken dan nu het geval is. Bovendien wordt een nog sterkere beperking opgelegd indien men wil voorkomen, dat binnen de tijd van twee uur, indien ook hier een onbetrouwbaarheidsgrens van 0,023 gesteld wordt, congestie optreedt.

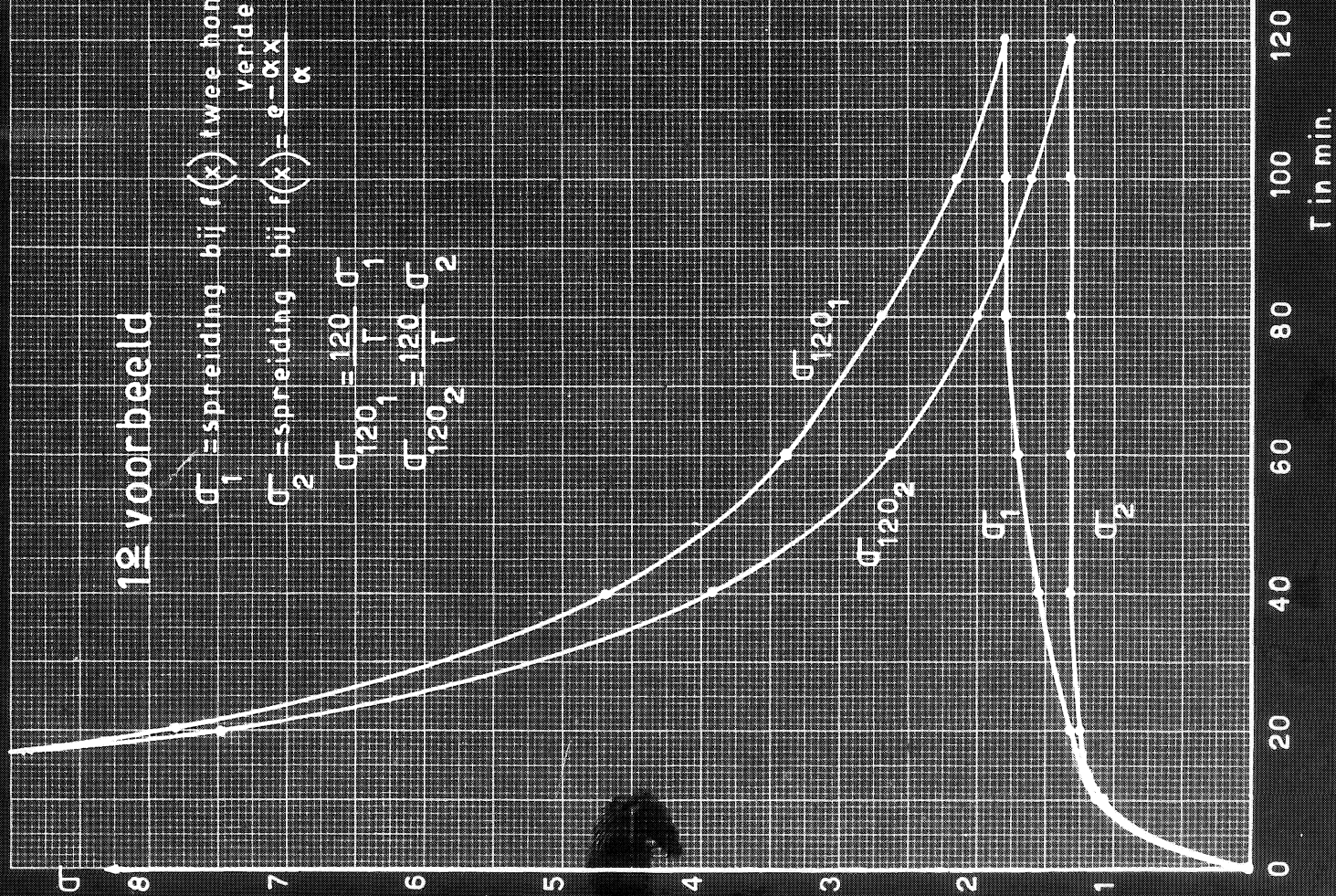
Het ligt in de bedoeling in een volgend rapport verschillende vragen nader te onderzoeken, mede met behulp van intussen ontvangen gegevens over de aankomsttijden van vliegtuigen op Schiphol.

12 voorbeeld

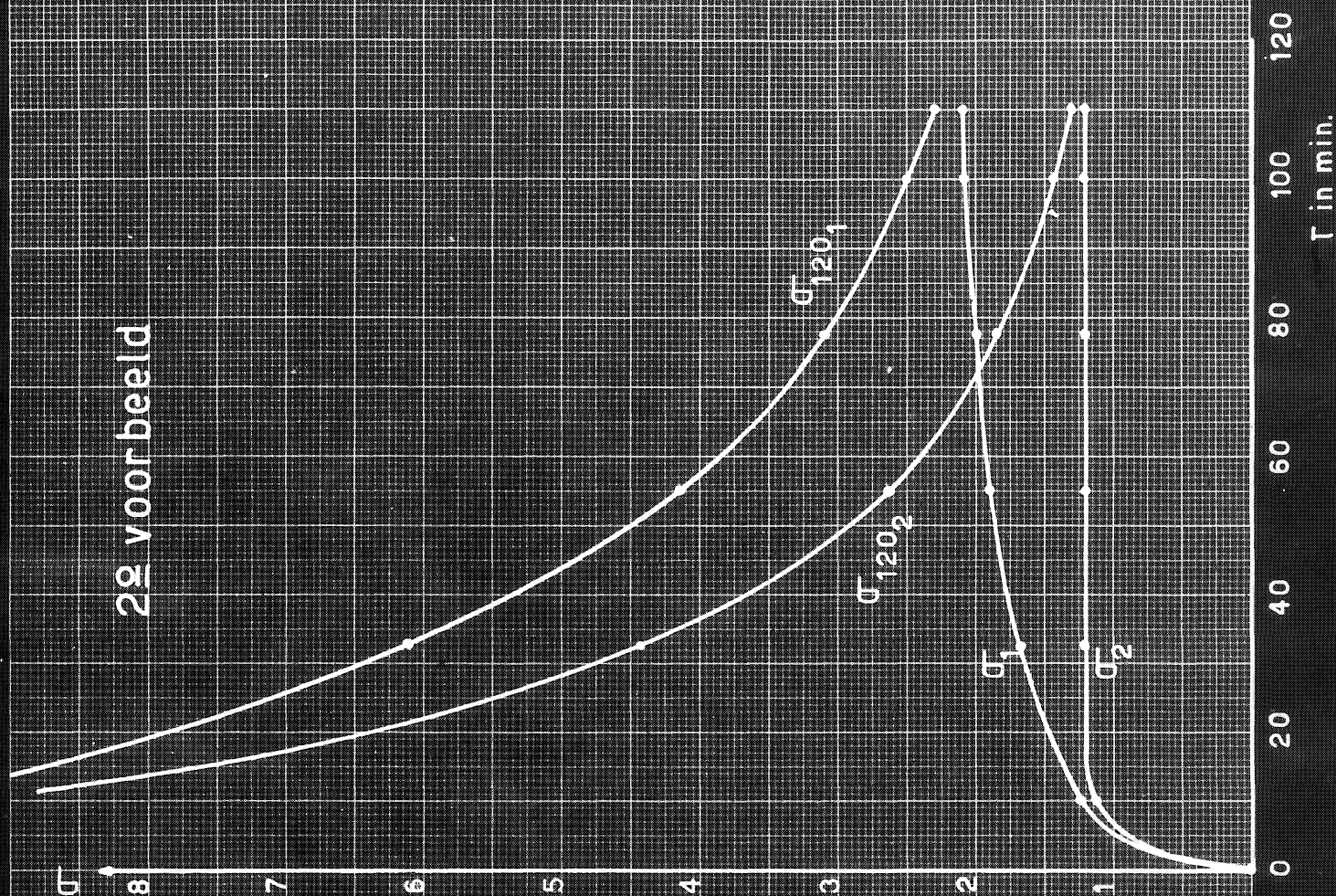
σ_1 = spreiding bij $f(x)$ twee homogene verdelingen
 σ_2 = spreiding bij $f(x) = e^{-\alpha x}$

$$\sigma_{120_1} = \frac{120}{T_1} \sigma_1$$

$$\sigma_{120_2} = \frac{120}{T_2} \sigma_2$$



22 voorbeeld



Men leze: σ_2 = spreiding bij $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$